SUITES ET SÉRIES – RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1. Généralités sur les suites

DÉFINITION (VOCABULAIRE DE BASE)

- **convergence vers un réel :**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

si la limite existe elle est **unique**

- **convergence divergence vers $+\infty$ / $-\infty$:**

$$u_n \longrightarrow +\infty \iff \forall A > 0\, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \geqslant A$$
$$u_n \longrightarrow -\infty \iff \forall A < 0\, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_A, \quad u_n \leqslant A$$

- **suites particulières :**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** $\iff \exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** $\iff \exists m \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** $\iff \exists M \geqslant 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **(dé)croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle croissante ou décroissante

rem. la suite $\left((-1)^n\right)_n$ est **non monotone**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** $\iff \exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant N, \quad u_n = c$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **périodique** $\iff \exists T \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+T} = u_n.$

- **suites récurrentes particulières :**

  1. **suites arithmético-géométriques :**

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

  (a) si $a = 1$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison** b :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nb, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

  (b) *si $a \neq 1$ et $b = 0$:* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison** a :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 a^n, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = a^m \times \frac{1 - a^{n-m}}{1-a}$$

  (c) *si $a \neq 1$ et $b \neq 0$* en posant $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$

  $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a et $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)a^n$.

  2. **suites récurrentes linéaire d'ordre 2 :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

  $\rightsquigarrow$ équation caractéristique : $r^2 - ar - b = 0$

  - deux racines réelles distinctes r_1, r_2 :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

  - racine double r_0 :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha + \beta n) r_0^n \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

  - pas de racine réelle : hors programme

  Le couple (α, β) est déterminé par les conditions initiales (u_0, u_1).

  $\rightsquigarrow$ L'ensemble des suites vérifiant cette relation est un **s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2**.

- **suites adjacentes :**

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes} \iff \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{est croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$$

- **suites extraites :** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante on remarque que $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n.

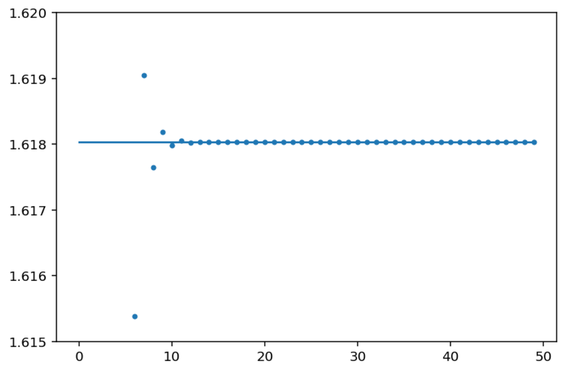
EXERCICE 1 (Suite de Fibonacci). $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. (a) Compléter la fonction Python permettant d'afficher le rapport $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

```python
import numpy as np
def quotient(n):
    u , v =  .... , ....
    for _ in range( ... ):
        u , v = v , u+v
    return ......
```

(b) On ajoute les lignes suivantes donnants le résultat graphique ci-dessous.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
n=50
x=[quotient(k) for k in range(n)]
n=[k for k in range(n)]
plt.clf()
plt.plot(n,x,'.')
```



Que peut-on conjecturer?

2. Exprimer F_n en fonction de n (formule de Binet).
3. Montrer que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \varphi$ (*le nombre d'or* c'est à dire, l'unique réel positif vérifiant $\varphi^2 = \varphi + 1$ soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498\,95)$.

PROPRIÉTÉ 2 (OPÉRATIONS SUR LES LIMITES)

Soient $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \longrightarrow m \in \mathbb{R}$.

- **linéarité :** $\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda \ell + \mu m$

  $\rightsquigarrow$ l'ensemble des suites convergentes est un **s.e.v** de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- **produit, quotient :** $u_n v_n \longrightarrow \ell m$; si $m \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \dfrac{\ell}{m}$
- **composition :** si f est continue en ℓ et $u_n \longrightarrow \ell$, alors $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$.
- **passage à la limite dans une inégalité :**

  si $u_n \leqslant v_n$ APCR et $u_n \longrightarrow \ell$, $v_n \longrightarrow m$, alors $\ell \leqslant m$.

  L'inégalité stricte n'est pas préservée.

- **théorème d'encadrement dit « des gendarmes » :**

  si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ APCR et $\ell \in \mathbb{R} \begin{cases} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell \end{cases}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv et $v_n \longrightarrow \ell$.

- **théorème de comparaison :**

  si $u_n \leqslant v_n$ APCR, alors $\begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow v_n \longrightarrow +\infty \\ v_n \longrightarrow -\infty \Longrightarrow u_n \longrightarrow -\infty \end{cases}$

- **suites extraites :** si $u_n \longrightarrow \ell$, alors toute suite extraite tend aussi vers ℓ.

  $\rightsquigarrow$ en pratique : $u_n \longrightarrow \ell \iff u_{2n} \longrightarrow \ell$ **et** $u_{2n+1} \longrightarrow \ell$.

EXERCICE 2.

1. *Opérations :* Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$. Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

   Hint : quantité conjuguée.
2. *Comparaison :* Que dire de $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ si on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} \geqslant u_n + \ln(n)$?

   Hint : étudier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$.
3. *Encadrement :* Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\dfrac{\cos(n)}{n^2}$ et $\dfrac{\sin(n)}{\ln(n)}$ tendent vers 0.
4. *Composition :* On rappelle que $\ln(1+u) \sim u$ en 0.

   Déterminer la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Hint : passer sous forme exponentielle.*
5. *Suites extraites :* Montrer que la suite $\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)_n$ est divergente.
6. *Suites extraites bis :* Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{2n})_n$ converge vers ℓ_1 et $(u_{3n})_n$ converge vers ℓ_2. Montrer que $\ell_1 = \ell_2$.
7. *Passage à la limite :* Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 4$, et telle que $\left(u_n^2 - 7u_n\right)_n$ converge vers -10. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

THÉORÈME 3 (CONVERGENCE MONOTONE)

- Toute suite croissante et majorée est convergente (vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente (vers $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$).
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

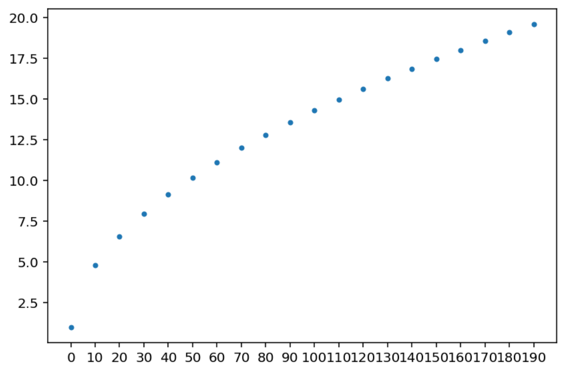
Ce théorème garantit l'existence d'une limite mais **ne la calcule pas**. On ne confondra pas la limite avec le majorant.

EXERCICE 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement croissante.
2. (a) La fonction `suite(u0,n)` ci-dessous permet de renvoyer la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre un réel u_0 et un entier naturel n. Compléter les lignes manquantes.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def suite(u0,n):
    u= ...
    for _ in range(n):
        u = ....
    return ....
```

On a représenté la liste `[suite(u0,10*n] for n in range(20)` :



(b) Expliquer le rendu graphique et émettre une conjecture sur la nature asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Démontrer la conjecture, quelque soit $u_0 > 0$ choisi au départ. *Hint : par l'absurde puis monotonie.*
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2 + 2$ puis en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant \sqrt{u_0^2 + 2n}.$$
5. En déduire une deuxième démonstration de la conjecture.

COROLLAIRE 4 (SUITES ADJACENTES)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$, et $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout n.

EXERCICE 4 (Moyenne arithmético-géométrique)**.**
Soient $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on conclure sur leur limite commune ?

EXERCICE 5 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}$. On note
$$u_n = H_n - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On notera $\gamma \in \mathbb{R}$ leur limite commune.
   Hint : montrer que $\forall x > -1,\quad \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. *On a en réalité* $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

DÉFINITION (INTERVALLE STABLE)

- **intervalle stable :** I est **stable par** f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire si $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.
- **point fixe :** α est un **point fixe** de f sur I si $f(\alpha) = \alpha$

ce sont les candidats naturels pour $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

REMARQUE **1.**
Si I est stable par f et si $u_0 \in I$, alors tous les termes u_n restent dans I : on le montre par récurrence.

Propriété 5 (Condition nécessaire de convergence)

Si $u_n \longrightarrow \alpha$ et si f est **continue** en α, alors α est un point fixe de f.

Remarque **2.**

L'existence de points fixes ne garantit pas la convergence : c'est un outil pour trouver la limite **une fois la convergence établie** par un autre argument (convergence monotone, inégalité des accroissements finis, ...).

Théorème 6 (Inégalités des accroissements finis (IAF))

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors pour tous $x, y \in [a,b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \cdot |x - y|.$$

Corollaire 7 (Convergence par l'IAF — f contractante)

Soit f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ stable, telle que : $\exists\, k \in]0,1[, \quad \forall x \in [a;b], \quad |f'(x)| \leqslant k$

on dit que f est k-**contractante**.

Soit $\alpha \in [a;b]$ est un point fixe de f. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k|u_n - \alpha|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant k^n |u_0 - \alpha|.$
- La suite converge vers α
- u_n approche α à ε près si $k^n|u_0 - \alpha| < \varepsilon$.

Remarque **3.**

L'IAF permet non seulement de conclure à la convergence, mais aussi d'estimer la vitesse de convergence — et donc d'écrire des algorithmes d'approximation numérique de α.

Exercice 6 (Approximation de $\sqrt{2}$ via l'IAF)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$ et que $\ell = \sqrt{2}$ est l'unique point fixe de f dans $[1,2]$.
2. Montrer que $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[1,2]$, puis que $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. En déduire la convergence.

Méthode d'étude d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bien définie :**
  par récurrence en s'appuyant sur un intervalle I stable par f contenant u_0.
- **monotonie de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:**
  1. *méthode 1 : f croissante et récurrence :* si f est croissante sur un intervalle I stable, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** (croissante si $u_1 \geqslant u_0$, décroissante si $u_1 \leqslant u_0$). On le prouve par récurrence, l'hérédité reposant sur la croissance de f qui préserve les inégalités.
  2. *méthode 2 : f décroissante :* si f est décroissante, la suite n'est pas monotone mais les suites extraites $\left(u_{2n}\right)_n$ et $\left(u_{2n+1}\right)_n$ le sont (utiliser $f \circ f$ qui est croissante + méthode 1).
  3. *méthode 3 : signe de $f(x) - x$:* $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, si $f(x) - x$ garde un signe constant sur un intervalle I stable où vivent tous les termes, alors la suite est monotone (croissante si $f(x) - x \geqslant 0$, décroissante si $f(x) - x \leqslant 0$) cette méthode ne nécessite pas de récurrence.
- **point fixe :** on résout l'équation $f(x) = x$ soit directement soit en posant $g : x \longmapsto f(x) - x$ et en appliquant le théorème de la bijection à g sur I démontrant que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$. Cette deuxième méthode ne permet pas de calculer α mais prouve son existence, ce qui suffit en général pour avancer dans l'exercice.
- **convergence :**
  1. *cas f croissante et la suite est bornée :* la suite est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) et donc converge vers un point fixe de f sur I obtenu par l'application de la propriété 5 à citer le jour J.
  2. *cas f décroissante :* dans ce cas, les deux sous-suites $\left(u_{2n}\right)_n$ et $\left(u_{2n+1}\right)_n$ sont monotones et convergent (en général) vers un point fixe de $f \circ f$ sur I.
  3. *f vérifie les condition de l'IAF et est contractante :* dans ce cas d'après le 7 à re-démontrer le jour J on a $|u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha| \longrightarrow 0$ et la suite tend vers le point fixe de f.
- **divergence vers l'infini :** si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais f n'a pas de point fixe dans l'intervalle I. Dans ce cas en raisonnant par l'absurde sur « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » on aboutit à une contradiction impliquant la divergence vers $+\infty$. De même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers $-\infty$.

EXERCICE 7 (Méthode avec l'étude de $f(x)-x$).

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer les intervalles stables et les points fixes.
2. Étudier le signe de $f(x)-x$ et discuter la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0.
3. Discuter la convergence et la limite selon u_0.

EXERCICE 8 (Méthode de Héron pour approcher $\sqrt{2}$).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ (suite de Héron). Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puis que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout n, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1, et en déduire sa convergence et sa limite.

EXERCICE 9 (Cas où f est décroissante).

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

1. Montrer que $u_n \in [1,3]$ pour tout n.
2. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
3. En posant $g = f\circ f$, montrer que (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.

3. Suites implicites

Une suite est dite **implicite** lorsque ses termes ne vérifient pas une relation de récurrence mais sont définis comme les solutions d'une famille d'équations paramétrées par n. La seule information disponible est que x_n vérifie l'équation $f_n(x_n) = 0$.

DÉFINITION (SUITE IMPLICITE)

Une suite implicite $(x_n)_n$ est définie par la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'une équation $f_n(x) = 0$ admettant une unique solution x_n. L'outil d'existence est le **théorème de bijection** (ou des valeurs intermédiaires).

REMARQUE **4.**

Si l'équation est de la forme $f(x) = g(n)$, on peut se ramener à $h_n(x) = 0$ en posant $h_n(x) = f(x) - g(n)$. Le fait que 0 soit dans l'image de h_n est à vérifier explicitement.

Méthode pour l'étude d'une suite implicite

Tout se base sur la relation $\boxed{f_n(x_n) = 0}$:

- **existence de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:** dresser le tableau de variation de f_n, vérifier que f_n réalise une bijection sur un intervalle image <u>contenant 0</u>, et conclure.
- **monotonie :** pour comparer x_n et x_{n+1}, on compare $f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$ puis $f_n(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$ (souvent égaux), ce qui permet ensuite d'obtenir une comparaison entre $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$ donnant une comparaison entre x_n et x_{n+1} en utilisant la <u>monotonie</u> de f_{n+1}.
  EXEMPLE : si $f_n(x_n) = 0$ défini notre suite avec f_n décroissante et que réussi à démontrer que $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$, alors :
  $$f_{n+1}(x_n) \geqslant 0 \underset{f_n(x_n)=0}{\Longrightarrow} f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n) \underset{f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1})=0}{\Longrightarrow} f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}) \underset{f_{n+1}\text{décroissante}}{\Longrightarrow} x_n \leqslant x_{n+1}$$
- **encadrement :** pour comparer le terme x_n avec d'autres suites, on compare les images de l'encadrement par f_n.
  EXEMPLE : pour avoir $0 < x_n < \frac{1}{n}$ avec f_n croissante et $\begin{cases} f_n(0) < 0 \\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \end{cases}$, alors :
  $$\begin{cases} f_n(0) < 0 \\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \end{cases} \underset{f_n(x_n)=0}{\Longrightarrow} f_n(0) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right) \underset{f_n\text{ croissante}}{\Longrightarrow} 0 < x_n < \frac{1}{n}$$
- **convergence/divergence :** pas de méthode générale, on utilise l'encadrement ou l'énoncé pour conclure. Dans l'exemple précédent, on aurait facilement $u_n \longrightarrow 0$ par encadrement.

EXERCICE 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$ pour tout n.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) est convergente. Pour calculer ℓ, montrer d'abord que $u_n^n \in \left]0, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right[$, déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n^n$ et enfin ℓ.

EXERCICE 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $e^x + x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'existence et la monotonie de (x_n) puis déterminer son comportement asymptotique.

4. Étude asymptotique : négligeabilité et équivalents

Deux suites peuvent toutes deux tendre vers 0 (ou vers $+\infty$) sans le faire à la même vitesse. L'étude asymptotique quantifie ces écarts. Elle est aussi l'outil fondamental pour étudier la convergence des séries.

DÉFINITION (VOCABULAIRE)

- **négligeabilité :** $u_n = o(v_n) \iff \exists \varepsilon_n \longrightarrow 0$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ APCR

  $\rightsquigarrow$ si $v_n \neq 0$ APCR : $u_n = o(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0.$
- **équivalent :** $u_n \sim v_n \iff \exists \varepsilon_n \longrightarrow 0$ telle que $u_n = (1+\varepsilon_n) v_n$ APCR

  $\rightsquigarrow$ si $v_n \neq 0$ APCR : $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1.$

REMARQUE **5.**

1. $u_n = o(1) \iff u_n \longrightarrow 0$
2. La relation $u_n = o(v_n)$ n'est pas symétrique : $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$ ne peuvent coexister que si les deux suites sont nulles APCR. La relation $u_n \sim v_n$ est elle par contre symétrique.
3. $u_n \sim 0$ n'a de sens que si $u_n = 0$ APCR alors que $u_n \sim +\infty$ n'a tout simplement pas de sens.

PROPRIÉTÉ 8 (L'ÉQUIVALENCE COMME OUTIL DE CALCUL DE LIMITE)

Si $u_n \sim v_n$, les deux suites ont même limite (finie ou infinie).
Réciproquement : si $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim \ell$.

PROPRIÉTÉ 9 (ÉQUIVALENTS DES POLYNÔMES)

$a_p n^p + \ldots + a_0 \sim a_p n^p$ (si $a_p \neq 0$). Prendre un équivalent, c'est travailler **au premier ordre**.

PROPRIÉTÉ 10 (PROPRIÉTÉS OPÉRATOIRES)

- **négligeabilité :**

  <u>*transitivité :*</u> $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$.

  <u>linéarité :</u> $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n) \Rightarrow \lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

  <u>*produit :*</u> $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n) \Rightarrow u_n v_n = o(w_n x_n)$.

  $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$ ne permettent **pas** de conclure $u_n + w_n = o(v_n + x_n)$ en général.
- **équivalence :**

  <u>*réflexivité :*</u> $u_n \sim u_n$, <u>*symétrie :*</u> $u_n \sim v_n \iff v_n \sim u_n$,

  <u>*transitivité :*</u> $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{cases} \Rightarrow u_n \sim w_n$

  <u>*produit :*</u> $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n \Rightarrow u_n v_n = o(w_n x_n)$.

  <u>*quotient :*</u> $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n) \Rightarrow u_n v_n = o(w_n x_n)$.

  <u>*puissances réelles :*</u> avec $u_n, v_n > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

REMARQUE **6.**

1. on n'additionne jamais les équivalents : $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ ne permettent **pas** de conclure $u_n + v_n \sim w_n + x_n$.
2. la composition des équivalents est interdite en général. Des particuliers (hors-programme) existent néanmoins.

EXERCICE 12 (Composition)**.**

1. Montrer que : $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff u_n - v_n \longrightarrow 0$.
2. Montrer que : $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ u_n \longrightarrow +\infty \end{cases} \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$

PROPRIÉTÉ 11 (LIEN FONDAMENTAL ENTRE LES DEUX NOTIONS)

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

EXERCICE 13 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.**
On reprend les notations de l'exercice 5.
Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et en déduire que $H_n \sim \ln(n)$.

Théorème 12 (Résultats de références)

- **Croissances comparées :** Pour $a, b > 0$ et $q > 1$:

$$(\ln n)^b = o(n^a) \qquad n^a = o(q^n) \qquad q^n = o(n!) \qquad \underset{\text{croissance exp.}}{\text{on a : } q^n = e^{\ln(q)n} \text{ avec } \ln(q) > 0.}$$

- **Equivalents usuels :**

$$\ln(1+u_n) \sim u_n, \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n, \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \ (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

$$\sin(u_n) \sim u_n, \qquad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}, \qquad \underset{\text{Formule de Stirling (hors programme)}}{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Exercice 14. 1. Montrer que $n - n\ln(n) - n^3 \sim -n^3$

2. A l'aide d'équivalents simples, déterminer la limite de $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n(n-1)}$, $v_n = \dfrac{e^n + n^3}{e^n}$, $w_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{e^n - 2^{2n+1}}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow 1$. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(u_n)}{1-u_n}$
4. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{1}{2}$
5. On suppose que $(n+1)u_n^3 \longrightarrow 2$. Déterminer un équivalent simple de u_n.
6. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie APCR : $n^2 + n \leqslant u_n \leqslant n^2 + n\ln(n)$. Déterminer un équivalent simple de u_n.
7. Etudier la limite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{n}$. *Hint : passer à la forme exponentielle.*
8. Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{n!}$ *Hint : utiliser la formule de Stirling.*
9. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$
10. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \sim n!$ *Hint : montrer préalablement que* $\sum\limits_{k=0}^{n-2} k! = o(n!)$

5. Séries numériques

Définition (vocabulaire de base)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- **sommes partielles de rang n :** $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \qquad \rightsquigarrow u_n = S_n - S_{n-1}$
- **série de terme général u_n :** notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et correspond à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- **série convergente :** la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ cv $\Longleftrightarrow$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv

  nature d'une série : dépend du comportement de u_n APCR

  condition nécessaire de cv : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} u_n \longrightarrow 0$
- **somme d'une série convergente :** $S = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$

  $\rightsquigarrow$ limite des sommes partielles
- **reste d'une série convergente :** $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \qquad R_n \to 0$ et $u_n = R_{n-1} - R_n$.
- **série absolument convergente :** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est AC si $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ cv.

Exercice 15 (Divergence de la série harmonique)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$. *Ce qui montre bien sûr que la condition $u_n \longrightarrow 0$ **n'implique pas la cv** de la série!!*

Exercice 16. 1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{\ln(n)}$ dv grossièrement.

2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ dv. *Hint : comparer les sommes partielles avec celles de la série harmonique.*

Propriété 13 (Opérations)

- **linéarité :** si $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ cv alors pour tout $\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum_n (\lambda u_n + \mu v_n) \text{ cv} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

$\rightsquigarrow$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_n u_n$ converge est un **s.e.v** de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- **séries télescopiques :** on a $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0$ et de plus :

$\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ cv $\Longleftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv, et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n-u_0$.

- **séparation des termes pairs et impairs :**

$$\sum_n u_{2n} \text{ et } \sum_n u_{2n+1} \text{ cv} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ cv et } \sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n+1}.$$

- **produit de Cauchy :** (hors programme) si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ cv alors en posant $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$:

$$\sum_n c_n \text{ cv} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_k\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right).$$

THÉORÈME 14 (SÉRIES DE RÉFÉRENCE)

- **séries géométriques :**
  1. *géométrique :* $\sum_{n\geqslant m}q^n$ cv $\Longleftrightarrow |q|<1$ et $\sum_{n=m}^{+\infty}q^n=\dfrac{q^m}{1-q}$.
  2. *dérivée première :* $\sum_{n\geqslant 1}nq^{n-1}$ cv $\Longleftrightarrow |q|<1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}nq^{n-1}=\dfrac{1}{(1-q)^2}$.
  3. *dérivée seconde :* $\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)q^{n-2}$ cv $\Longleftrightarrow |q|<1$

     et $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)q^{n-2}=\dfrac{2}{(1-q)^3}$.
- **séries exponentielles :** $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{x^n}{n!}$ cv pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$.
- **séries de Riemann :** $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ cv $\Longleftrightarrow \alpha>1$.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n\longrightarrow+\infty$	$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln 2$	$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$
série harmonique	série harmonique alternée	hors-programme

EXERCICE 17. Montrer l'existence et calculer la la valeur des sommes suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(n-2)3^n}{n!}$
5. $\sum_{n=3}^{+\infty}\dfrac{a^n}{(n-3)!}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$
7. $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$
8. $\sum_{n=2}^{+\infty}pq^{n-1}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{(n-1)!}$
10. $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{3x^{-n}}{2^n}$
11. $\sum_{n=2}^{+\infty}n2^{-n}$
12. $\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n+2^n}{n!}$

EXERCICE 18. En admettant le résultat hors programme ci-dessus, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ cv et calculer sa somme.

THÉORÈME 15 (SÉRIES À TERMES POSITIFS (S.T.P))

On suppose que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant 0$.

- **monotonie :** la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est croissante

  $\rightsquigarrow$ si $(S_n)_n$ est majorée $\Longrightarrow \sum_n u_n$ cv
- **critères de convergence :**
  1. *comparaison :* si $0\leqslant u_n\leqslant v_n$ APCR alors $\begin{cases}\sum_n v_n \text{ cv} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ cv}\\ \sum_n u_n \text{ dv} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ dv}\end{cases}$
  2. *négligeabilité :* $u_n=o(v_n)$ alors $\begin{cases}\sum_n v_n \text{ cv} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ cv}\\ \sum_n u_n \text{ dv} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ dv}\end{cases}$
  3. *équivalence :* $u_n\sim v_n \Longrightarrow \sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

EXERCICE 19. Etudier la nature des séries suivantes (on ne demande pas de calculer la somme) :

1. $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2+1}$
2. $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
3. $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n}$
4. $\sum_{n\geqslant 0}e^{-\sqrt{n}}$
5. $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$
6. $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

EXERCICE 20 (Produit infini).

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$, où $n\in\mathbb{N}^*$.

REMARQUE **7.**
La série de Riemann est l'étalon de référence pour les séries à termes positifs. Avant d'appliquer les critères généraux, il est souvent plus direct de comparer u_n à $\frac{1}{n^\alpha}$.

Propriété 16 (Comparaison avec les séries de Riemann — cas pratiques)

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs (APCR).

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ converge (car $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$).
2. S'il existe $\alpha > 1$ et $M > 0$ tels que APCR $n^\alpha |u_n| \leqslant M$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
3. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $\ell > 0$ (ou $\ell = +\infty$) tels que $n^\alpha u_n \longrightarrow \ell$, alors $\sum u_n$ diverge.
4. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$ avec $\ell \neq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

L'exposant seuil est $\alpha = 1$: si u_n décroît plus vite que $\frac{c}{n}$ (i.e. $\alpha > 1$), on espère la convergence ; moins vite ($\alpha \leqslant 1$), c'est la divergence.

Exercice 21. Étudier la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n^{5/2}}$, $\quad v_n = e^{-\sqrt{n}}$ et $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Théorème 17 (convergence absolue - Admis)

- **inégalité triangulaire :** $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$.
- **AC ⇒ CV :** la convergence absolue implique la convergence
- **inégalité triangulaire infinie :** en cas d'AC alors $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

Exercice 22. Etudier l'AC des séries $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$

Exercice 23. On suppose que $\sum_n u_n$ est AC. Montrer que $\sum_n u_n^2$ CV.

Exercice 24. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$. Montrer que $\sum_n u_n$ CV.

Remarque 8.
1) AC ⇒ CV mais la réciproque est fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas AC. Une telle série est dite **semi-convergente** (hors-programme).
2) Une série alternée $\sum (-1)^n u_n$ (ou $\sum (-1)^{n-1} u_n$) ne peut pas être étudiée directement par les critères positifs. Lorsqu'elle n'est pas AC, le critère suivant est souvent le seul outil disponible (hors-programme).

Théorème 18 (Critère spécial des séries alternées - hors programme)

Soit (u_n) une suite **positive, décroissante, tendant vers** 0. Alors :

1. La série $\sum (-1)^n u_n$ **converge**.
2. Les suites des sommes partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont **adjacentes** : (S_{2n}) est décroissante, (S_{2n+1}) est croissante, et elles convergent vers la même limite S.
3. **Majoration du reste :** pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant u_{n+1}.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, ce qui donne des encadrements de la somme.

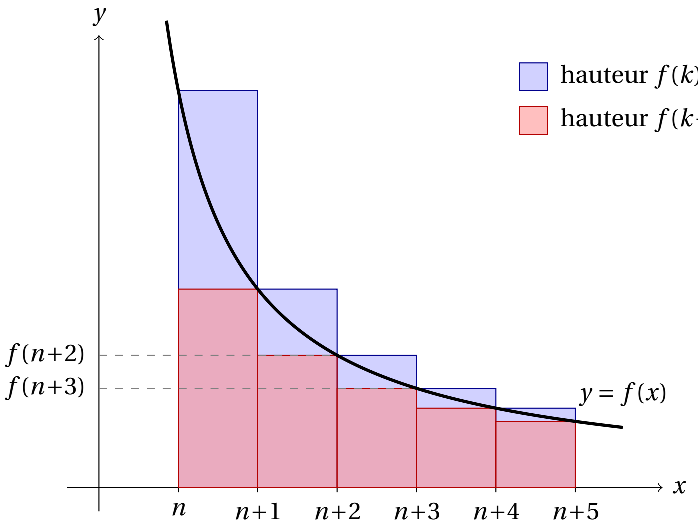
Remarque 9.
1. C'est un résultat hors-programme, on ne peut l'utiliser directement mais dont la démonstration peut faire l'objet d'une partie d'un sujet.
2. La majoration $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ est très utile en pratique : pour obtenir une valeur approchée de S à ε près, il suffit de trouver N tel que $u_{N+1} \leqslant \varepsilon$ et de prendre $S \approx S_N$.
3. Le CSA s'applique à $\sum_n (-1)^{n-1} u_n$ de la même façon (les rôles de (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont échangés).

Exercice 25 (cv et calcul de la somme de la série harmonique alternée)**.**

1. Convergence : Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
2. Calcul de la somme :
   (a) En utilisant que $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\,dx$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

6. Comparaison série-intégrale

Lorsqu'on ne sait pas comparer directement à une série de Riemann, la comparaison avec une intégrale impropre est un outil puissant dans le cas d'une série $\sum_n f(n)$ avec f une fonction décroissante.



$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)$$

Etudier la nature d'une série par comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction décroissante, continue et positive sur $[n_0;+\infty[$ ($n_0 \in \mathbb{N}$).

- en utilisant la décroissance de f et la propriété de croissance de l'intégrale sur $[k,k+1]$:
$$\forall k \geqslant n_0, \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k).$$
- En sommant pour k de n_0 à $n-1$, puis en manipulant les indices :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt + f(n) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt + f(n_0).$$
- On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \sim \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$

  La nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ se lit alors sur la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

REMARQUE **10.**
On prendra garde au fait que la méthode ci-dessous n'est pas au programme et qu'on pourrait être amené dans un sujet à re-démontrer ces points.

EXERCICE 26 (développement asymptotique de la série harmonique)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. En comparant H_n à $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t}$, retrouver l'équivalent $H_n \sim \ln n$.
2. À l'aide d'une étude de convergence de série, montrer la convergence de la suite $u_n = H_n - \ln(n)$.

   Sa limite est appelé constante d'Euler, elle est souvent notée $\gamma \approx 0,577$.
3. En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

EXERCICE 27 (séries de Bertrand)**.**

On appelle **série de Bertrand** toute série de type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln t}$, puis en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.
2. Plus généralement, montrer que la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

7. Complément : limites inférieures et supérieures

HORS PROGRAMME ECG. Les notions de limite supérieure et de limite inférieure ne figurent **pas** au programme de mathématiques approfondies (elles relèvent plutôt d'un premier cycle universitaire ou des classes MP/PC). Cette fiche est une fiche d'**enrichissement** : aucune question de colle ou de concours ECG ne peut les exiger par leur nom. Tous les résultats ci-dessous sont néanmoins redémontrés à partir d'outils strictement au programme (théorème de la limite monotone, suites extraites, théorème d'encadrement) : c'est un excellent exercice de synthèse sur le chapitre des suites.

Cours

Définition (Limite supérieure, limite inférieure)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **bornée**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \sup_{k\geq n} u_k \qquad \text{et} \qquad w_n = \inf_{k\geq n} u_k$$

(ces bornes existent car $(u_k)_{k\geq n}$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$). On admet pour l'instant que (v_n) et (w_n) convergent (cf. Propriété 1) ; on note alors :

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n := \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n := \lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n.$$

Propriété 19 (Existence de la limsup et de la liminf)

Avec les notations ci-dessus, (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante ; toutes deux convergent.

Preuve : Soit (u_n) une suite bornée, et (v_n) définie par $v_n = \sup\limits_{k\geq n} u_k$.

- ▷ **Croissance de (v_n).** Pour tout n, $\{u_k : k \geq n+1\} \subset \{u_k : k \geq n\}$ (le premier ensemble est obtenu en retirant l'éventuel élément u_n du second). Le supremum étant croissant pour l'inclusion des parties bornées non vides de $\mathbb{R}$: $v_{n+1} = \sup\limits_{k\geq n+1} u_k \leq \sup\limits_{k\geq n} u_k = v_n$.
- ▷ **Convergence de (v_n).** (v_n) est décroissante d'après la question précédente. Elle est de plus minorée : comme (u_n) est bornée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_k \geq m$ pour tout k, donc $v_n = \sup\limits_{k\geq n} u_k \geq m$ pour tout n. Par le **théorème de la limite monotone** (suite décroissante minorée), (v_n) converge. □

Propriété 20 (Encadrement et lien avec la convergence)

$$(u_n) \text{ converge} \iff \liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n,$$

et dans ce cas, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ est égale à cette valeur commune.

Preuve :

- ▷ **Inégalité :** $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$. Pour tout n, $u_n \in \{u_k : k \geq n\}$, donc par définition de l'inf et du sup d'un ensemble contenant u_n : $w_n = \inf\limits_{k\geq n} u_k \leq u_n \leq \sup\limits_{k\geq n} u_k = v_n$. En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans cette inégalité (les deux suites (w_n) et (v_n) convergeant, d'après la Propriété 19 et son analogue pour w_n) : $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.
- ▷ **Sens réciproque**. On suppose que $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$. On a $w_n \leq u_n \leq v_n$ pour tout n, avec $w_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell$. Par le théorème d'encadrement, $u_n \longrightarrow \ell$.
- ▷ **Sens direct**. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \longrightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $\ell - \varepsilon < u_k < \ell + \varepsilon$. Pour $n \geq N$, ceci entraîne en particulier que $\{u_k : k \geq n\} \subset]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, donc $v_n = \sup\limits_{k\geq n} u_k \leq \ell + \varepsilon$; comme (v_n) est décroissante et que cette majoration vaut pour tout $n \geq N$, on a $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim v_n \leq \ell + \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \ell$. Un raisonnement symétrique sur w_n donne $\liminf u_n \geq \ell$. Avec l'inégalité $\liminf u_n \leq \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ du 1^{er} point, on obtient $\ell \leq \liminf u_n \leq \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \ell$, d'où l'égalité $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$. □

Propriété 21 (Caractérisation par les valeurs d'adhérence – admis)

On appelle valeur d'adhérence de (u_n) toute limite d'une suite extraite de (u_n). On peut montrer (résultat plus délicat, admis ici) que $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ est la **plus grande** valeur d'adhérence de (u_n), et $\liminf u_n$ sa **plus petite**. C'est cette caractérisation qui explique l'intérêt de la notion : elle capture en un seul réel toute l'information sur les limites des suites extraites possibles.

Exercices

EXERCICE 28 (Calculs directs)**.** Déterminer, pour chacune des suites bornées suivantes, $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

1. $u_n = 1+(-1)^n$
2. $u_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$
3. $u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Correction :

1. (u_n) ne prend que les valeurs 2 et 0, chacune une infinité de fois (rangs pairs et impairs). Pour tout n, $v_n = \sup\limits_{k\geq n} u_k = 2$ et $w_n = \inf\limits_{k\geq n} u_k = 0$ (l'une des deux valeurs ± 1 est toujours atteinte au-delà du rang n). Donc $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$ et $\liminf u_n = 0$.
2. Pour n pair, $u_n = 1+\frac{1}{n+1} > 1$; pour n impair, $u_n = -1-\frac{1}{n+1} < -1$. La sous-suite des termes pairs décroît strictement vers 1 (valeurs > 1 s'approchant de 1), donc $v_n \longrightarrow 1$: $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$. De même $\liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -1$ par la sous-suite des termes impairs.
3. $\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)_n$ est périodique de période 4, de valeurs successives $1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots$: $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$ et $\liminf u_n = -1$.
4. Pour n pair $u_n = 2$ si n et $u_n = n$ si n est impair.

   Pour $n \geqslant 2$: parmi les $k \geqslant n$, les indices pairs donnent toujours $u_k = 2$, et les indices impairs donnent $u_k = k \geqslant n \geqslant 2$ (avec égalité possible uniquement si n lui-même est impair, auquel cas $u_n = n \geqslant 3 > 2$). Dans tous les cas, $u_k \geqslant 2$ pour tout $k \geqslant n$, avec égalité atteinte pour les indices pairs et d'autre part $u_k \geqslant k$ pour une infinité de k.

   Donc $\forall n \geqslant 2,\quad \inf\limits_{k\geqslant n} u_k = 2$ et $\sup\limits_{k\geqslant n} u_k = +\infty$.

   (Pour $n = 0$ ou $n = 1$, cette borne inférieure vaut 1, atteinte en $k = 1$: $u_1 = 1$. Mais ceci ne joue aucun rôle dans le calcul de la limite, qui ne dépend que du comportement asymptotique.)

   On en déduit donc immédiatement que $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.

   De plus, la suite $(\inf_{k\geqslant n} u_k)_n$ est donc constante égale à 2 à partir de $n = 2$, d'où $\liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$.

☞ *Remarque:* On observe que les suites dans les cas 1 et 4 ont la même limite inférieure que si l'on ne gardait que leurs valeurs « basses » : la liminf « oublie » les pics qui ne se reproduisent pas indéfiniment vers le bas, contrairement à la limsup qui retiendrait ici 2 pour y_n et $+\infty$ pour z_n (car $z_n = n \longrightarrow +\infty$ le long des indices impairs).

EXERCICE 29 (la limsup est une valeur d'adhérence)**.** Soit (u_n) une suite bornée, $L = \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$. On veut construire une suite extraite de (u_n) convergeant vers L (ce qui prouve, dans ce sens, la Proposition admise du cours).

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe $k \geq N$ tel que $u_k > L-\varepsilon$.
   Indication : raisonner par l'absurde en utilisant la définition de $v_N = \sup\limits_{k\geq N} u_k$ et le fait que $v_N \geq L$.
2. En déduire, par récurrence, la construction d'une suite strictement croissante d'indices $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout p, $u_{n_p} > L - \dfrac{1}{p+1}$.
3. On admet par ailleurs (sans démonstration ici) que $u_{n_p} \leq v_{n_p} \leq v_0$ et plus généralement que $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ majore essentiellement les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang à ε près ; en déduire que $u_{n_p} \longrightarrow L$.

Correction :

1. Par définition, $v_N = \sup\limits_{k\geq N} u_k \geq \sup\limits_{k\geq N'} u_k = v_{N'}$ pour tout $N' \geq N$ (suite décroissante), donc $v_N \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = L$. Si l'on avait $u_k \leq L-\varepsilon$ pour tout $k \geq N$, alors $L-\varepsilon$ serait un majorant de $\{u_k : k \geq N\}$, donc $v_N \leq L-\varepsilon < L \leq v_N$: contradiction. Il existe donc bien $k \geq N$ tel que $u_k > L-\varepsilon$.
2. On construit (n_p) par récurrence. Pour $p = 0$: par la question 1 appliquée à $\varepsilon = 1$, $N = 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $u_{n_0} > L-1$. Supposons $n_0 < n_1 < \cdots < n_p$ construits avec $u_{n_i} > L - \frac{1}{i+1}$ pour tout $i \leq p$. Appliquons la question 1 à $\varepsilon = \frac{1}{p+2}$ et $N = n_p+1$: il existe $n_{p+1} \geq n_p+1$ (donc $n_{p+1} > n_p$) tel que $u_{n_{p+1}} > L - \frac{1}{p+2}$. La récurrence se poursuit, construisant une suite strictement croissante d'indices avec la propriété voulue.
3. Pour tout p, $L - \frac{1}{p+1} < u_{n_p} \leq v_{n_p}$ (car $u_{n_p} \in \{u_k : k \geq n_p\}$, dont v_{n_p} est le sup). Comme $(v_n) \longrightarrow L$ et $(n_p) \longrightarrow +\infty$, $v_{n_p} \longrightarrow L$ (suite extraite d'une suite convergente). Par le théorème d'encadrement appliqué à $L - \frac{1}{p+1} < u_{n_p} \leq v_{n_p}$, on obtient $u_{n_p} \longrightarrow L$: la suite extraite (u_{n_p}) converge bien vers $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

8. Complément : séries entières

HORS PROGRAMME ECG. Les séries entières ne figurent pas au programme de mathématiques approfondies. Cette fiche se limite volontairement à la variable réelle (pas de variable complexe), et calcule les rayons de convergence par comparaison géométrique directe – exactement la méthode déjà utilisée « à la main » dans le chapitre sur la convergence absolue des séries, plutôt que de citer une règle de d'Alembert ou de Cauchy-Hadamard par leur nom.

Cours

DÉFINITION (SÉRIE ENTIÈRE, RAYON DE CONVERGENCE)

On appelle **série entière** (réelle) une série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, où (a_n) est une suite réelle fixée et $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'il existe un unique $R \in [0, +\infty]$, appelé **rayon de convergence**, tel que :

— pour $|x| < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument;

— pour $|x| > R$, la série $\sum a_n x^n$ diverge (grossièrement : $a_n x^n \not\longrightarrow 0$).

(Pour $|x| = R$, le comportement dépend du cas particulier et doit être étudié séparément.)

LEMME 22 (CRITÈRE DE D'ALEMBERT)

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général vérifie $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0; +\infty]$.

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ **converge** (absolument) ;
- si $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$), la série $\sum u_n$ **diverge** (grossièrement : $u_n \not\longrightarrow 0$) ;
- si $\ell = 1$, on ne peut **rien conclure** : le critère ne s'applique pas.

Preuve :

Cas $\ell < 1$. Choisissons $q \in]\ell; 1[$ (un tel q existe puisque $\ell < 1$). Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q.$$

Par produit télescopique, pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n = u_N \cdot \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant u_N \cdot q^{n-N}.$$

Or $\sum q^{n-N}$ est une série géométrique convergente (car $0 \leqslant q < 1$), donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Cas $\ell > 1$ (ou $\ell = +\infty$). Choisissons $q \in]1; \ell[$ (resp. $q = 2$ si $\ell = +\infty$). Il existe N tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q > 1,$$

donc $u_n \geqslant u_N \cdot q^{n-N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (croissance géométrique de raison $q > 1$). En particulier $u_n \not\longrightarrow 0$, donc le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

Cas $\ell = 1$: aucune conclusion possible. Voir le contre-exemple ci-dessous.

EXEMPLE. Pour $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a dans les deux cas $\ell = 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et pourtant $\sum u_n$ **diverge** (série harmonique) alors que $\sum v_n$ **converge** (série de Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Ceci illustre que le cas $\ell = 1$ est bien indécidable par ce seul critère : il faut alors utiliser un autre outil (comparaison à une série de Riemann, équivalent, etc.).

□

Calcul pratique de R par comparaison géométrique

Pour calculer R, on fixe $x \neq 0$ et on étudie le rapport $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \times \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (en supposant $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang). Si ce rapport admet une limite $\ell(x)$ quand $n \longrightarrow +\infty$:

- si $\ell(x) < 1$: comparaison à une série géométrique de raison < 1, donc $\sum a_n x^n$ converge absolument (cf. méthode déjà vue pour reconstruire le critère de d'Alembert « à la main ») ;
- si $\ell(x) > 1$: le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement.

En général $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \lambda$ pour une constante $\lambda \geq 0$ indépendante de x ; on a alors

$\ell(x) = \lambda|x|$, et la condition $\ell(x) < 1$ équivaut à $|x| < \frac{1}{\lambda}$: on trouve ainsi $R = \dfrac{1}{\lambda}$ (avec les conventions $R = +\infty$ si $\lambda = 0$, $R = 0$ si $\lambda = +\infty$).

Lemme 23

Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R, alors pour tout entier $p \geq 0$ fixé, la série $\sum n(n-1)\cdots(n-p+1)\,a_n x^n$ a le **même** rayon de convergence R.

Démonstration du Lemme 23 : On calcule, pour $x \neq 0$ fixé, le rapport $\dfrac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n}$ appliqué à la suite $b_n = n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n$:

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n}\right| = |x| \times \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times \frac{(n+1)n\cdots(n-p+2)}{n(n-1)\cdots(n-p+1)}.$$

Le dernier facteur est un rapport de deux polynômes en n de même degré p, donc tend vers 1 quand $n \longrightarrow +\infty$. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \lambda$ (donnant le rayon $R = \frac{1}{\lambda}$ pour $\sum a_n x^n$), alors le produit ci-dessus tend vers $\lambda|x| \times 1 = \lambda|x|$: **exactement** la même limite que pour la série de départ. Le rayon de convergence obtenu est donc identique : R. $\square$

Lemme 24

Pour tout $n \geq 1$ et tous réels u, v :

$$u^n - v^n = (u-v)\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k}.$$

Démonstration du Lemme 24 : On développe le membre de droite :

$$(u-v)\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} v^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k}.$$

Dans la première somme, on pose $j = k+1$ (donc j varie de 1 à n) : elle devient $\sum_{j=1}^{n} u^j v^{n-j}$. La seconde somme s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k}$. La différence de ces deux sommes télescope : tous les termes communs aux indices $1, \ldots, n-1$ s'annulent, ne laissant que le terme $j = n$ de la première (u^n) et le terme $k = 0$ de la seconde (v^n, avec un signe $-$) : on obtient $u^n - v^n$. $\square$

Théorème 25 (Dérivabilité d'une série entière)

La fonction $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est dérivable en tout point $x_0 \in]-R, R[$, et :

$$S'(x_0) = \sum_{n\geq 1} n a_n x_0^{n-1}.$$

Démonstration du Théorème 1 : Fixons $x_0 \in]-R, R[$ et choisissons r tel que $|x_0| < r < R$ (possible car $R > |x_0|$). Pour $h \neq 0$ assez petit pour que $|x_0 + h| \leq r$, on étudie le taux d'accroissement.

Étape 1 – réécriture du taux d'accroissement. D'après le Lemme 24 appliqué à $u = x_0 + h$, $v = x_0$:

$$(x_0+h)^n - x_0^n = h\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^k x_0^{n-1-k},$$

donc $S(x_0+h) - S(x_0) = h\sum_{n\geq 1} a_n \sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^k x_0^{n-1-k}$, d'où, en divisant par h et en retranchant la série dérivée candidate (et en utilisant $\sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}$ pour faire apparaître une différence) :

$$\frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} - \sum_{n\geq 1} n a_n x_0^{n-1} = \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1-k}\Big[(x_0+h)^k - x_0^k\Big].$$

Étape 2 – nouvelle application du télescopage. D'après le Lemme 24 appliqué cette fois à $u = x_0 + h$, $v = x_0$ avec l'exposant k : $(x_0+h)^k - x_0^k = h\sum_{j=0}^{k-1}(x_0+h)^j x_0^{k-1-j}$. Comme $|x_0| \leq r$ et $|x_0 + h| \leq r$, chacun des k termes de cette somme est majoré par $r^j \cdot r^{k-1-j} = r^{k-1}$, donc :

$$|(x_0+h)^k - x_0^k| \leq |h| \cdot k \cdot r^{k-1}.$$

Étape 3 – majoration globale. En reportant dans l'expression de l'étape 1, et en majorant $|x_0^{n-1-k}| \leq r^{n-1-k}$:

$$\left|\frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-1-k} \cdot |h| \cdot k \cdot r^{k-1} = |h| \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} k.$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$, donc :

$$\left|\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1}\right| \leq \frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2} =: C|h|,$$

où $C = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-2}$ est une **constante** (indépendante de h), **finie** d'après le Lemme 23 appliqué à $p=2$: la série $\sum n(n-1)a_n x^n$ a le même rayon R que $\sum a_n x^n$, donc converge absolument en $x = r < R$.

Conclusion. On a montré $\left|\frac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1}\right| \leq C|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Par le théorème d'encadrement, le taux d'accroissement de S en x_0 converge donc vers $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1}$: S est dérivable en x_0, de dérivée annoncée. □

COROLLAIRE 26

- Une fonction dérivable en un point y est continue en ce point : S est donc continue sur $]-R,R[$, et cette nouvelle série entière dérivée a le même rayon de convergence R.
- En appliquant le premier point à la série entière dérivée et par récurrence, S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

Exercices

EXERCICE 30 (Calculs de rayons de convergence)**.** Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes et, si possible, calculer leur somme sur leur intervalle de définition :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n\geq 0} 2^n x^n \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$$

Correction : On applique le critère de d'Alembert :

1. Ici $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{n} \longrightarrow 0 : \lambda = 0|$, donc $R = +\infty$ et on reconnait la série exponentielle :
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \text{ sur } \mathbb{R}.$$
2. Ici $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = 2|x|$ pour tout n : $\lambda = 2|x|$, donc $R = \frac{1}{2}$ et on reconnait une série géométrique :
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \frac{1}{1-2x} \text{ sur }]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}[.$$
3. Ici $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}|x| \longrightarrow |x| : \lambda = |x|$, donc $R = 1$. On ne reconnait pas une somme calculable (série de Riemann).
4. Ici $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = x^2 : \lambda = x^2$, donc $R = 1$ et on reconnait une série géométrique :
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \text{ sur }]-1,1[.$$

EXERCICE 31 (Dérivation terme à terme : série géométrique dérivée)**.**
On rappelle que pour $|x|<1$, $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ (série géométrique).

1. Quel est le rayon de convergence de cette série ? Justifier rapidement avec la méthode du cours.
2. En dérivant terme à terme (Théorème 1), montrer que pour $|x|<1$:
$$\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$
3. En déduire que pour $|x|<1$, $\sum_{n\geq 0} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Correction :

1. Ici $a_n = 1$ pour tout n, donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \longrightarrow 1 : \lambda = 1$, donc $R = 1$. (Cohérent avec le fait que $\frac{1}{1-x}$ n'est pas définie en $x=1$.)
2. La fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$ est la somme de la série $\sum x^n$ sur $]-1,1[$. D'après le Théorème 1, S est dérivable sur $]-1,1[$ et :
$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}.$$
Or, en calculant directement $S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$. D'où l'égalité demandée.

3. En multipliant par x l'égalité de la question précédente :

$$x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Le terme $n=0$ ne contribuant pas (facteur $n=0$), on peut écrire indifféremment $\sum_{n\geq 0} nx^n = \sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Exercice 32 (Primitive terme à terme –somme de la série harmonique alternée)**.**

1. Justifier que la série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence $R=1$.
2. On admet que, comme pour la dérivation, l'intégration terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence est licite : si $T(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$, alors $T'(x)=\sum_{n\geq 1} x^{n-1}$ pour $x\in]-1,1[$. Calculer $T'(x)$ sous forme close, et en déduire (avec $T(0)=0$) que $T(x)=-\ln(1-x)$ pour $x\in]-1,1[$.
3. Que vaut $T(-1)$, c'est-à-dire $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$, d'après ce résultat ? Ce point est-il couvert par la théorie du cours (Définition 1) ? Faire le lien avec la valeur de la somme de la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Correction :

1. Ici $a_n=\frac{1}{n}$, donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$: $\lambda=1$, donc $R=1$.
2. Pour $x\in]-1,1[$: $T'(x)=\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$ (série géométrique, valable car $|x|<1$). Comme $T'(x)=\frac{1}{1-x} = -\frac{d}{dx}\big(\ln(1-x)\big)$, les fonctions T et $x\mapsto -\ln(1-x)$ ont même dérivée sur $]-1,1[$: elles diffèrent donc d'une constante. Or $T(0)=0$ (somme vide) et $-\ln(1-0)=0$: la constante est nulle, donc $T(x)=-\ln(1-x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.
3. Formellement, $T(-1)=-\ln(1-(-1))=-\ln 2$, c'est-à-dire $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$. Mais attention : $x=-1$ est sur le **bord** du disque de convergence ($|x|=R=1$), un cas que la Définition 1 ne couvre pas directement (elle ne garantit la convergence que pour $|x|<R$) – il faudrait, pour être rigoureux, redémontrer indépendamment que la série numérique $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge bien en ce point précis (ce qui est le cas, par le résultat déjà établi sur la série harmonique alternée), puis invoquer un théorème supplémentaire (dit « théorème d'Abel radial », encore plus hors-programme) pour garantir que la limite obtenue coïncide avec le prolongement par continuité de T. En multipliant par -1 : $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, ce qui est exactement le résultat voulu : les deux approches (suites adjacentes, et séries entières) convergent vers la même conclusion.